PAGE NO. :
DATE :

Mathematical Induction

✩ uses

1. Establish Identities → IDentities Proof કરવા
2. Divisible Problems → Divisible Proof કરવા.
3. Recursion Type relation → ફરીથી બનતા સંબંધો સાબિત કરવા.

First Principle

→ To Proof Proposition by mathematical Induction

Step-1 If $P(n)$ depends on n then we will verify for $\underline{n = 1}$ (natural no.)

It is called verification step.

→ આ step માં કોઈપણ Problem ની Starting Value સાબિત કરવામાં આવે છે.
તે value સાચી છે કે ખોટી તે verify કરવામાં આવે છે.

Step-2 (Induction step)

→ we will asume that $P(n)$ is true for $n = K$ $(K > 1)$ and than we will use it to prove for $n = K + 1$

→ આ Step માં $n = K$ $(K > 1)$ proof થાય છે. તેના માટે $P(n)$ ની $n = K$ માટે true છે. તેમ ધારી લેવાય અને તેના પછી $n = K + 1$ Proof થાય.

→ જો $n = K + 1$ Proof થાય તો તેના પછીની Gen. value automatic Proof થાય.

Ex. $K = 2$
$K = 2 + 1 = 3$

} 1 પહેલા Step માં Proof થાય
$K = 2$ બીજા Step માં
$K = 3$ બીજા Step માં - - - -

Step-3 (Generalised step)

→ Combining above two step.

→ પહેલા બે સ્ટેપ proof થાય તો તેને combine કરવાથી બધા value proof થઈ જાય.

તાર્કિક સંકેતમાં

$$(\forall P)\left[P(1) \wedge (\forall k \in N)\left(P(k) \Rightarrow P(k+1)\right)\right]$$

$$\Rightarrow (\forall n \in N)\left[P(n)\right]$$

Example

* Prove that if $\sin\alpha \neq 0$, then

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

is true for all $n \in N$

→ let $P(n) = \left(\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha} \right)$

let ~~P1~~ $\underline{n=1}$ so for $P(1)$

Step-1

→ $P(1) \left(\underline{\cos\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{4\sin\alpha} \right.$

$$\left. = \frac{\cancel{4\sin\alpha}\cos\alpha \cos 2\alpha}{\cancel{4\sin\alpha}} \right)$$

→ $n=1$ લેતાં શીખ્યા, $\cos^1\alpha = \cos\alpha$.

$\cos 2^1\alpha = \cos 2\alpha$ જ આવે.

But $\cos 4\alpha = \cos 2^2\alpha$. ના આવે.

$\therefore$ $n=2$ થઈ જાય.

Step-2

→ $P(k)\left(\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha \ldots \cos 2^{k}\alpha = \dfrac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}\right)$ — ①

∴ It will used to prove $n = k+1$

→ $P(k+1)\Big/\ \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha \ldots \underbrace{\cos 2^{k}\alpha}_{\sin^{k}\alpha \text{ માટે}}\ \underbrace{(\cos 2^{k+1}\alpha)}_{\sin^{k+1}\alpha \text{ માટે કોઈ value નથી.}} = \dfrac{\sin(2^{k+2})\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}$

→ ઉપરના equation માં ① ની value મૂકતાં

$$\frac{2}{2}\left(\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}\right)\left(\cos 2^{k+1}\alpha\right) = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}$$

$\boxed{\text{S} \mid \text{Cor} = \text{જુઓ}}$

It is proved

∴ $P(n)$ is true for $n \in N$

$$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cdot 2^{k+1}\sin\alpha} = \sin\theta$$

$n = 1$

$\boxed{1, 2, 3 \ldots n}$

$n = 1$

$n = 2$

$n+1$

$n = 1$

$n+1$

$n+2$

$n+3$

DATE :

Second Principle

→ If $P(n)$ is statement depending on $n \in N$ but $(n > k)$ $(k = \text{some integer})$

Step-1 Verify for $n = k$

$P(n)$ to be verified for $n = k$

→ જો $n = k$ લઈને n ને prove કરીએ તો $P(n)$ automatically prove થઈ જાય.

Step-2 Assume $P(n)$ to be true for

$$n = m \geq k$$

→ $P(n)$ એ કોઈ ચોક્કસ no. m ~~ને~~ $(m \geq k)$ માટે સાચી છે તેમ ધારવામાં આવે છે.

Step-3 using step (2) to prove for

$$n = m + 1$$

→ n એ $m+1$ માટે જો prove થાય તો first principle મુજબ n ની value given value માટે automatic proof થાય.

Then it is true for all n

Example

* Show that

$$^{2n}C_n > \frac{4^n}{n+1} \quad \forall\ n \in N \text{ and } n > 1$$

Step-1

→ $n = 2$ $\quad {}^4C_2 > \frac{4^2}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{2}\ 4 \times 3}{\cancel{2}} = 6 > \frac{16}{3}$

(varified)

Step-2

→ Assuming it is true for $n = k$

$$^{2k}C_k > \frac{4^k}{k+1}$$

Step-3

→ To prove it for $n = k+1$ using step ②

$$^{2k+2}C_{k+1} > \frac{4^{k+1}}{k+2} \qquad 3 + 2k + 1 > 2k + 2$$

$$^{2k+2}C_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!\,(k+1)!}$$

$$= \frac{(2k+2)(2k+1)\,(2k)!}{(k+1)\,(k)!\,(k+1)(k)!}$$

$$= \frac{2(2k+1)\ {}^{2k}C_k}{(k+1)}$$

DATE :

$$^{2k+2}C_{k+1} > \frac{2(2k+1)}{(k+1)}\frac{4^k}{(k+1)} > \frac{4^{k+1}}{k+2}$$

with assuming of step 2

$$\frac{2(2k+1)}{(k+1)^2} > \frac{4}{(k+2)}$$

$$(2k+1)(k+2) > 2(k+1)^2$$

$$\cancel{2k^2} + \cancel{4k} + k + \cancel{2} > \cancel{2k^2} + \cancel{2} + \cancel{4k}$$

$$\boxed{k > 0}$$

hence for $n = k+1$ It is true

PAGE NO.:
DATE:

TRICKS

Q.1] The biggest No. which divides $\cancel{3n}$ $3^{2n}-2n-1$

(1) 1 ✓(2) 2 (3) 4 (4) 8

$n = 1, 2, 3, \ldots$

→ ~~સાચેય option~~ term માં મુકી ચેક કરતા

$n=1$ $9-2-1=7$
$n=2$ $3^4-4-1=76$
$n=3$ $3^6-6-1=722$

} આ ત્રણેય નંબર 1 અને 2 થી Divide થાય પરંતુ 4 અને 8 થી Divide થતા નથી. અને 1 અને 2 માં 2 મોટો.

Q.2] For S_n i.e. sum of n terms.

$\underbrace{1\cdot 3^2}_{n=1} + \underbrace{2\cdot 5^2}_{n=2} + 3\cdot 7^2 + \ldots$

✓(1) $\frac{n}{6}(n+1)(6n^2+14n+7)$

(2) $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)(3n+1)$

(3) $4n^3+4n^2+n$

(4) None of these

→ $n=1$ $S_1 = 9$

$n=2$ $S_2 = 59$

} સાચેય option માં n ની value મુકતાં તે પહેલા option સાથે બંને value proof થાય છે.

→ Induction can be applied for those which admit of successive cases corresponding to the order of the natural no. 1, 2, 3, ---, n